里堂學算記五種

數爲六藝之一而廣其用則天地之綱紀羣倫之經緯也天與星辰之高遠非數無以效其靈地域之廣輪非數無以步其極世事之糾紛繁賾非數無以提其要通天地人之道曰儒孰謂儒者而可以不知數乎自漢以來如許商劉歆鄭康成賈逵何休韋昭杜預虞喜劉焯劉炫之徒或步天路而有驗於時或著算術而傳之於後凡在儒林類能爲算後之學者喜空談而不務實學薄藝事而不爲其學始衰降及明代寖以益微閒有一二士大夫留心此事而言測圓者不知天元習回回法者不知最高謬誤相仍莫能是正步算之道或幾乎息

矣欽惟我

國家稽古右文昌明數學

聖祖仁皇帝御製數理精蘊

高宗純皇帝欽定儀象考成諸編研極理數綜貫天人

鴻文寶典

日月昭垂固度越乎軒轅隸首而上之以故海內為學之士甄明度數洞曉幾何者後先輩出專門名家則有若吳江王曉闇錫闡淄川薛儀甫鳳祚宣城梅徵君文鼎儒者兼長則有若吳縣惠學士士奇婺源江慎修永休寧戴庶常震莫不各有撰述流布人閒蓋我

朝算學之盛實往古所未有也江都焦君里堂與元同居北湖之濱少同遊長同學里堂湛深經學長於三禮而於推步數術尤獨有心得比輯其所著加減乘除釋八卷天元一釋二卷釋弧三卷釋輪二卷釋橢一卷總而錄之名曰里堂學算記書成而屬元序之元思天文算法至今日而大備而談西學者輒詆古法爲觕疏不足道于是中西兩家遂多異同之論然元嘗稽攷算氏之遺文泛覽歐邏之述作而知夫中之與西枝條雖分而本幹則一也如西法三率比例卽古之今有術重測卽古之重今有借衰卽衰分之列衰叠借卽盈不足之

假令今之三角即句股借根方即立天元一至於地爲圓體則曾子十八篇已言之七政各有本天與郄萌日月不附天體之說相合月食入於地景與張衡蔽於地之說不別熊三拔簡平儀說寓渾於平而崔靈恩已立義以渾蓋爲一矣的谷四方行測㳄蒙氣反光之差而安岌已云地有游氣蒙蒙四合矣其它若天周三百六十度則邵康節亦嘗言之日周九十六刻則粱天監中嘗行之以此證彼若符節之合然則中之與西不同者其名而同者其實乃彊生畛域安所習而毀所不見何其陋歟里堂會通兩家之長不主一偏之見於古法穿

穴十經研求三數而折中乎劉氏徽之注九章西法隨事立說闡其隱祕而日月五星之果有小輪與夫日月五星本天之果爲橢圓與不則存而不論昔蔡中郞撰十意未竟上言欲思惟精意扶以文義潤以道術著成篇章今里堂之說算不屑屑舉夫數而數之精意無不包篩而不遺典而有則所謂扶以文義潤以道術者非邪然則里堂是記固將以爲儒流之典要備六藝之篇籍者矣元少畧涉斯學心鈍不能入深且以供職中外斯事遂廢今見里堂成此書敬且樂焉吾鄉通天文算學者

國朝以來惟泰州陳編修厚燿最精今里堂之學似有過之無不及也

嘉慶四年冬

經筵講官戸部左侍郎兼管國子監算學事務阮元譔

算之爲術可隨事以立名而皆不外於乘除加減加減者乘除之所自出然非乘除不足以盡加減之用故有四者而算法備矣古今算家多列其目句股旁要量測旣同開方少廣層累則一差分之外申之以均輸方程之後繼之以盈朒因其小別遂爲區分揆厥指歸豈有歧義夫不明其旨則易地致惑深究其理則後起可推竊以此義求之古先蓋論法者居多言理者絕少卽閒有之亦與法相淆而於舉綱挈領之要未盡合也今之爲是學者吳縣李尚之歙縣汪孝嬰萊吾邑焦里堂循三子者善相資疑相析孝嬰之學主於約在發古人

之所未發而正其誤其得也精倘之之學主於博在窮諸法之所由立而求其故其得也貫理堂則以精貫之旨推之於平易以爲理本自然取劉徽注九章算術之意著加減乘除釋八卷凡弧矢之相求正負之相得方員凸凹之異形齊同比例之殊制靡不先列其綱次疏其目俾學者可窮源以知流揣本而齊末其於二子之學蓋相輔而實相成矣夫由疏之密今古非有殊途因難而易中西本無二轍雖稱名舉類優絀互形正其權輿一言可解古人好學深思必曰心知其意里堂之書殆周髀以來諸書之統紀不獨劉氏之功臣也已

三年夏五月江都黃承吉序

加減乘除釋卷一

江都焦循學

劉氏徽之注九章算術，猶許氏慎之撰說文解字，士生千百年後，欲知古人仰觀俯察之旨，舍許氏之書不可，欲知古人參天兩地之原，舍劉氏之書亦不可。嘉定錢溉亭先生塘謂說文一部之中，聲無統紀，因取許氏書，離析合并，重立部首，系之以聲，其書雖未成，迄今講說文者，頗宗其意以著書，循謂古人之學，期於實用，以乂百工，察萬品，而作書契，分別其事物之所在，俾學者案形而得聲，若夫聲音之間，義蘊精

微未可人人使悟其旨趣此所以主形而不主聲也惟算亦然旣有少廣句股又必指而别之曰方田曰商功旣有衰分盈不足方程又必明以示之曰粟米曰均輸亦指其事物之所在而使學者人人可以案名以知術也然名起於立法之後理存於立法之先理者何加減乘除四者之錯綜變化也而四者之雜於九章則不啻六書之聲雜於各部故同一今有之術用於衰分復用於粟米同一齊同之術用於方田復用於均輸同一弦矢之術用於句股復用於少廣而立方之上不詳三乘以上之方四表之測未盡三

率相求之例，蓮其後者，又截粟米爲貴賤衰分，移均輸爲疊借互徵，名目既繁，本原益晦，蓋九章不能盡加減乘除之用，而加減乘除可以通九章之窮，孫子張邱建兩書，似得此意，乃說之不詳，亦無由得其會通，不揆淺陋，本劉氏之書，以加減乘除爲綱，以九章分注而辨明之，草創於乾隆甲寅之秋，明年爲齊魯遊，遂中輟，嘉慶二年丁巳，授徒村中，無酬應之煩，取舊稾細爲增損，得七卷，竊比於漑亭之於說文，庶幾與劉氏相表裏焉，倘有缺誤，願識者補而正之，幸甚，

時十二月大寒日。

以甲當甲爲適足以甲當乙爲盈以乙當甲爲朒

數之多少無定少至於一而絲忽之下尚有塵沙多至於萬而兆秭之上尚有溝澗惟是兩數相比而後爲盈爲朒爲適足乃定故算法起於相比也論數之理取於相通不偏舉數而以甲乙明之古之夭弟皆乙下於甲用其意以甲當盈以乙當朒

以甲加甲爲倍之以乙加乙以丙加丙以丁加丁並同

兩相當未相入也加減則相入矣兩甲數爲適足故相加爲倍也

以甲減甲爲減盡

減盡之法爲除法開方法之止境用之於方程者尤精蓋除法者除其所乘開方者除其所自乘故必減盡而除乃止除法開方法之有減盡正也方程駁錯糅正負數色相錯不可以囫圇得之其兩色者必先去其一色故互乘之後列首位者對減必盡對減盡則一色去矣數既錯糅則一色減盡一色減之必不盡惟三色者兩行互有空位互相減而其下位者適盡則爲兩色之較適足與首位之減盡者又異矣如馬一騾一其載四石二斗騾二驢一其載四石二斗馬二驢三其載四石二斗馬首位減盡此去其一色

也右中之騾一左下之驢三所對皆空而末列之載數左右均四石二斗減盡此爲騾一較驢三其載適足與兩馬之減盡不同也蓋適足者相當之名減盡者相入之名相入則兩數皆去故曰盡相當則兩數尙存故曰適盈不足術有適足而非出於相減盈不足之所與適足者隱伏不見而所見之兩盈兩朒以上兩率互乘之斷無適足之理故方程有減盡有適足盈不足有適足無減盡也

以甲中分爲半之

半之亦曰折半於除法爲二而一

遞相倍爲自倍遞相半爲自半

九章算術衰分云今有女子善織日自倍術云置一二四八十六爲列衰蓋倍一爲二倍二爲四倍四爲八倍八爲十六所謂自倍也又盈不足題云蒲生一日長三尺莞生一日長一尺蒲生日自半莞生日自倍問幾何日而長等又題云垣厚五尺兩鼠對穿大鼠日一尺小鼠亦日一尺大鼠日自倍小鼠日自半問幾何日相逢

三分甲以二爲太半以一爲少半

太半卽大半少半卽小半衰分術云田一畝收粟六

升太半升，商功術云，圓囷高一丈三尺三寸少半寸，是也。少半寸，猶言少於半寸，非謂鈌少半寸也。

有甲乙，欲得其中平，則相加而半之，欲仍得甲乙，則倍之而相減。

方田章邪田術云，并兩邪而半之，邪田為一句股一縱方相連形，并而半之，則成一縱方形也。箕田術云，并踵舌而半之，箕田為兩句股夾一縱方形，并而半之，亦成一縱方形也。推此而商功章城垣隄溝塹渠術云，并上下廣而半之。緝古算經造仰觀臺羡道術云，半上下廣差，又云，以上下廣差并上下袤差半之，

蓋無論爲冪爲體爲差有上下廣之不齊必用是法以齊之其方田章環田術云并中外周而半之商功章曲池術云并上中外周而半之以爲上袤亦并下中外周而半之以爲下袤此內周小於外周猶上廣小於下廣故并而半之以齊其不齊也以不齊之邊求積如是若以積求不齊之邊必倍中平廣數減上得下減下得上無可疑矣商功穿地爲垣術云置垣積尺以深袤相乘爲法所得除得中平廣數倍之減上廣餘即下廣是也句股章句弦并與股求句弦術云令七自乘亦令三自乘并而半之以爲甲邪行率蓋七爲

句弦并三為股凡句弦并自乘為句乘句股并者二句弦差乘句弦并者一句弦差乘句弦并同於股自乘之數故以股自乘并句弦并自乘而半之適得中平所以用為邪行率者雖別見通率之巧（句乘句弦并加句弦差乘句弦并是弦乘句弦并也於句弦并自乘數中減去弦乘句弦并是餘句乘句弦并也以句乘句弦并為句率以弦乘句弦并為弦率因以股乘句弦并為股率故為率之巧）而并而半之之意則無殊也

得數視所求為倍者則豫半之視所求為半者則豫倍之

乘必正方而後得數其方不正亦必正之則積數必

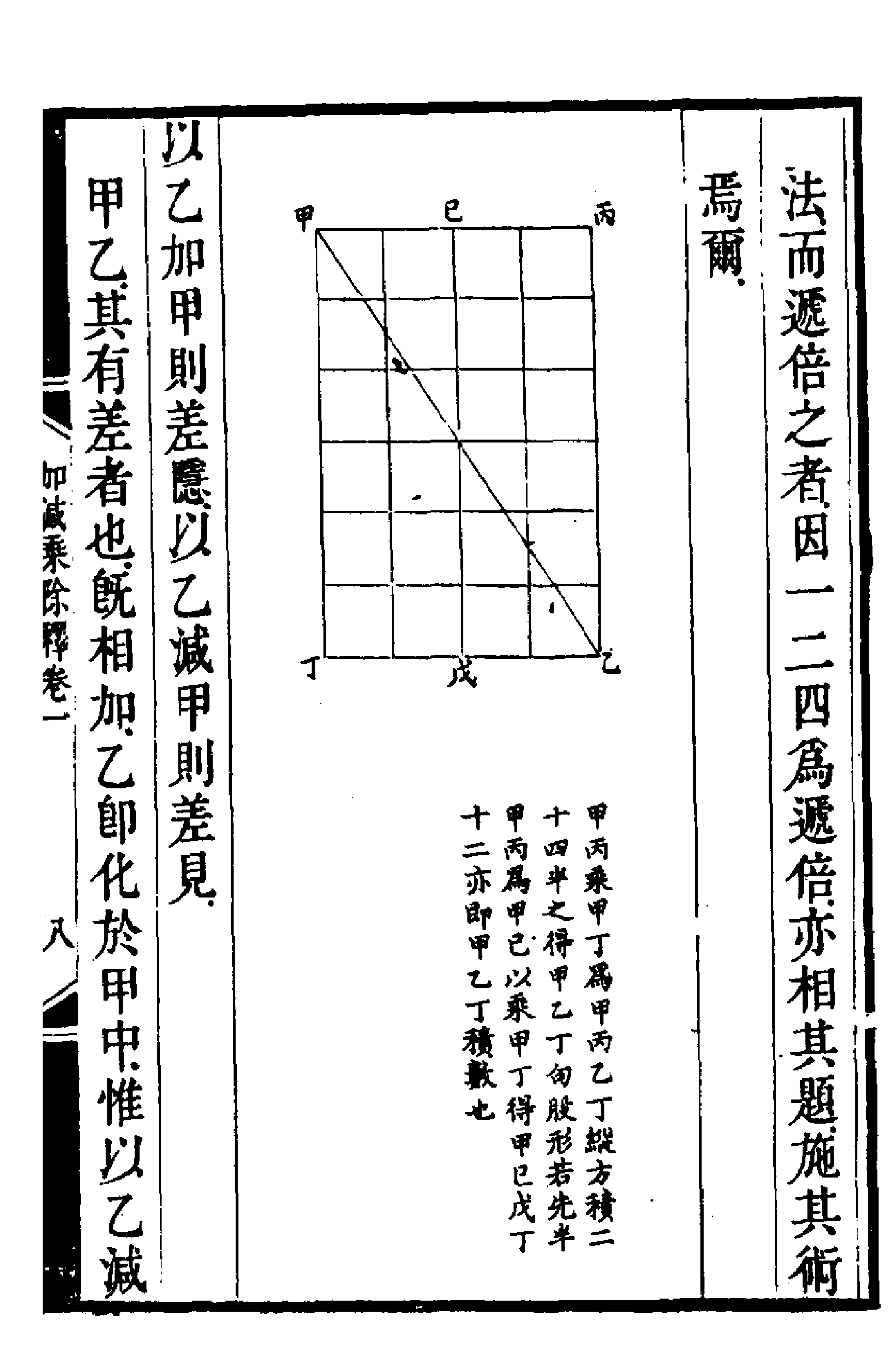
浮於本數，故豫半其邊，以求其合，方田圭田術云，半廣以乘正從，圭田卽兩要相等之三角形，正從卽中垂綫，以中綫爲界，以左補右，成正方形，而底綫適相半也，均輸術云，今有客馬日行三百里，客去忘持衣，日已三分之一，主人乃覺，持衣追及，與之而還，至家視日四分之三，問主人馬不休，日行幾何，術曰，置四分日之三，除三分日之一，半其餘以爲法，副置法，增三分日之一，以三百里乘之，爲實，此因四分日之三，爲客馬之行與主人往還之行相加之數，三分日之一，爲客馬單行之數，旣減去此數，餘爲主人往還之

數今止用主人追及之數爲率故半之也又句股葭池術云半池方自乘題云池方一丈葭生中央引葭赴岸適與岸齊自中央至岸適得池之半故亦於正而求其偏也又邑方二百步各中開門出東門十五步有木問出南門幾何步見之術曰出東門步數爲法半邑方自乘爲實半邑方者自中開門用自門至城隅爲股適當城之半猶葭生池之中而至岸也孫子算經云有獸六首四足禽四首二足上有七十六首下有四十六足問禽獸各幾何術曰倍足以減首餘半之即獸以四乘獸減足餘半之即禽蓋每首之

數十每足之數六以一獸一禽言倍足減首每獸尚餘二首故半之得獸數以四足乘之是爲獸足共數於禽獸共足中減獸之共足餘每禽二足故半之得禽數又雉兎同籠上有三十五頭下有四十九足問雉兎各幾何術曰上置頭下置足半其足以頭減足以足減頭即得蓋雉兩足兎四足半之是雉一足兎兩足矣一足與一頭相若故減去頭數所餘即兎足有一足即一兎矣約分之術云可半則半之相其題施其術諸用半之之義不外是言也倍與半爲向背圭田求積半廣以乘正從若求廣則倍積以開方之矣知半

之理即知倍之理也孫子算經云今有方田桑生中央從角至桑一百四十七步問田幾何術云置角至桑倍之以五乘之以七除之自相乘以二百四十步除之即得蓋中央至角僅得邪行之半故倍之而弦數乃全凡弦自乘倍於方田自乘既倍爲弦則自乘而半之可矣今以五乘七除七當作十五乘不啻二除即半之爾又三雞共啄粟一千一粒雛啄一母啄二翁啄四主責本粟三雞主各償幾何術云置粟一千一粒爲實并三雞所啄七粒爲法除之爲雛雛主所償之數遞倍之即得母翁主所償此爲衰分之常

法而遞倍之者因一二四爲遞倍亦相其題施其術焉爾



甲丙乘甲丁爲甲丙乙丁縱方積二十四半之得甲乙丁句股形若先半甲丙爲甲巳以乘甲丁得甲巳戊丁十二亦即甲乙丁積數也

以乙加甲則差隱以乙減甲則差見

甲乙其有差者也既相加乙即化於甲中惟以乙減

甲則甲中去一乙主客兩乙俱減盡然甲本盈於乙減去兩乙乙盡矣甲尚有所畱則差也加者容納之謂故長短偏雜之皆準減者鑒別之謂故纖豪蘖末之盡露二者相爲用而數可定矣緝古算經謂差爲多數少數

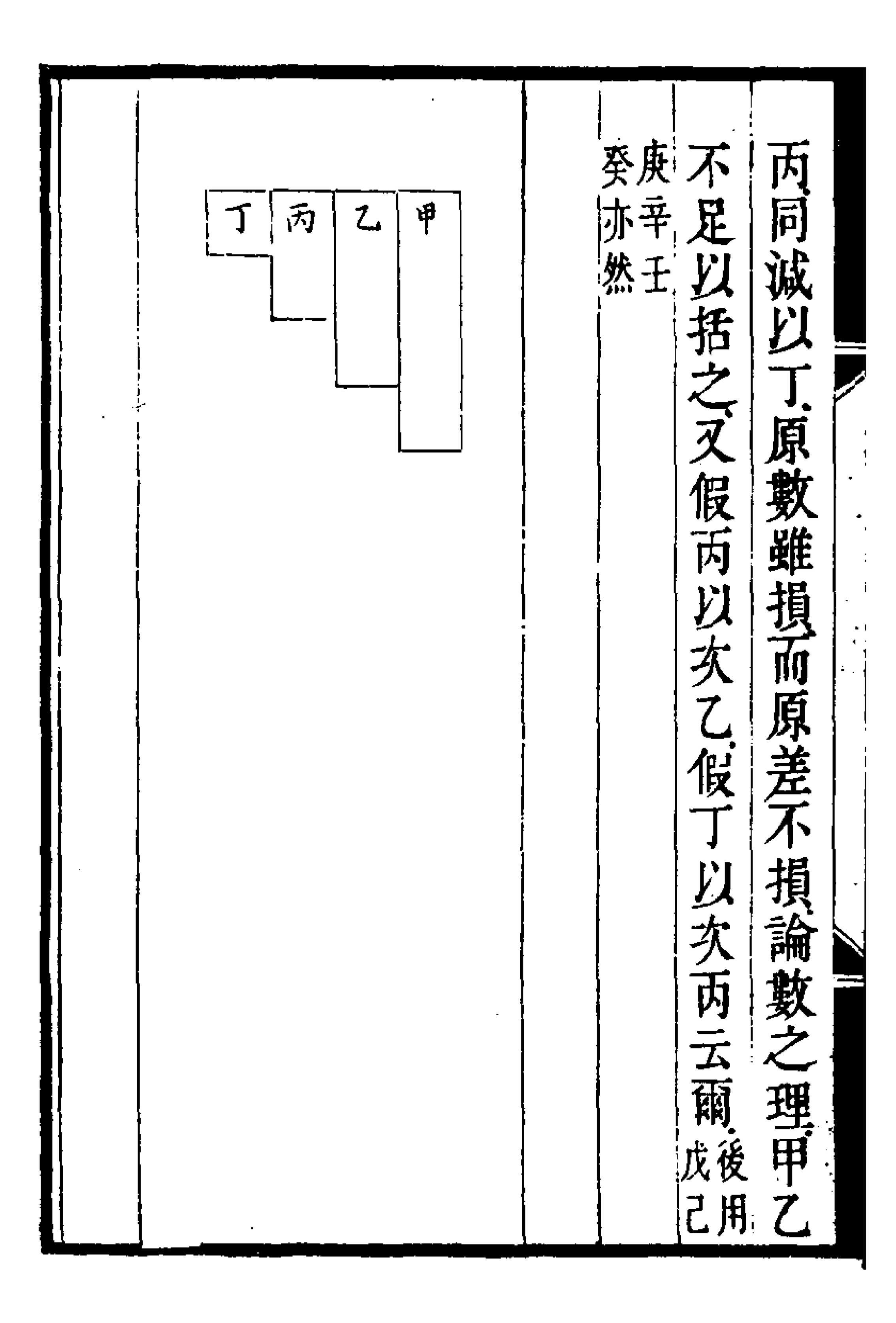
以甲加乙或以乙加甲其和數等於和數減甲得乙減乙得甲其較數必不等

和卽古所謂并較卽古所謂差加減者用法之名和較者得數之名甲乙本有差相加則無差故無論甲加乙乙加甲其得數必等若復以甲乙互減之則仍

有差矣既有差則數自不相等也惟和數等故用加者可以相通惟較數不等故用減者必不容相借以甲加乙以乙加甲則差平以甲加甲以乙加乙則差倍以甲加甲以甲加乙或以乙加甲以乙加乙則差如初以丙減甲以丙減乙或以丁減甲以丁減乙則差亦如初

甲本盈以乙消之乙本朒以甲補之故有差而無差此互加互乘之法所由用也詳見後 甲盈又益以甲乙朒止益以乙有兩甲乙即有兩甲乙之差故倍之也同加以甲同加以乙原數雖增而原差不增同減以

丙同減以丁原數雖損而原差不損論數之理甲乙不足以括之又假丙以次乙假丁以次丙云爾後用戊己庚辛壬癸亦然



乙
加甲
減乙甲
甲
加乙
平差

乙
加乙
減乙甲
甲
加甲
倍差

甲
減甲
甲
甲
減甲
乙
如差初

乙
減乙
甲
乙
減乙
乙
如差初

甲減丙 乙減丙 差如初

甲減丁 乙減丁 差如初

以乙加甲以丙加乙或以丙加甲以丁加乙則差必增反是以減則差必損

以乙加乙以丙加甲或以丙加乙以丁加甲則差必損反是以加則差必增若乙丙之差如甲乙之差則以乙加乙以丙加甲或以乙減甲以丙減乙其差皆平

以乙加甲以丙減乙差之增如乙丙之

和加甲乙之差以乙加乙以丙減甲差之變如乙丙之

積減甲乙之差

甲盈乙朒故有差乙盈兩朒亦有差今以盈加盈以

朒加朒是於甲乙差又增一乙丙之差矣若以朒加

盈以盈加朒是甲乙差損去一乙丙之差矣所以不

能平者以乙丙之差殊於甲乙之差也其差亦有同

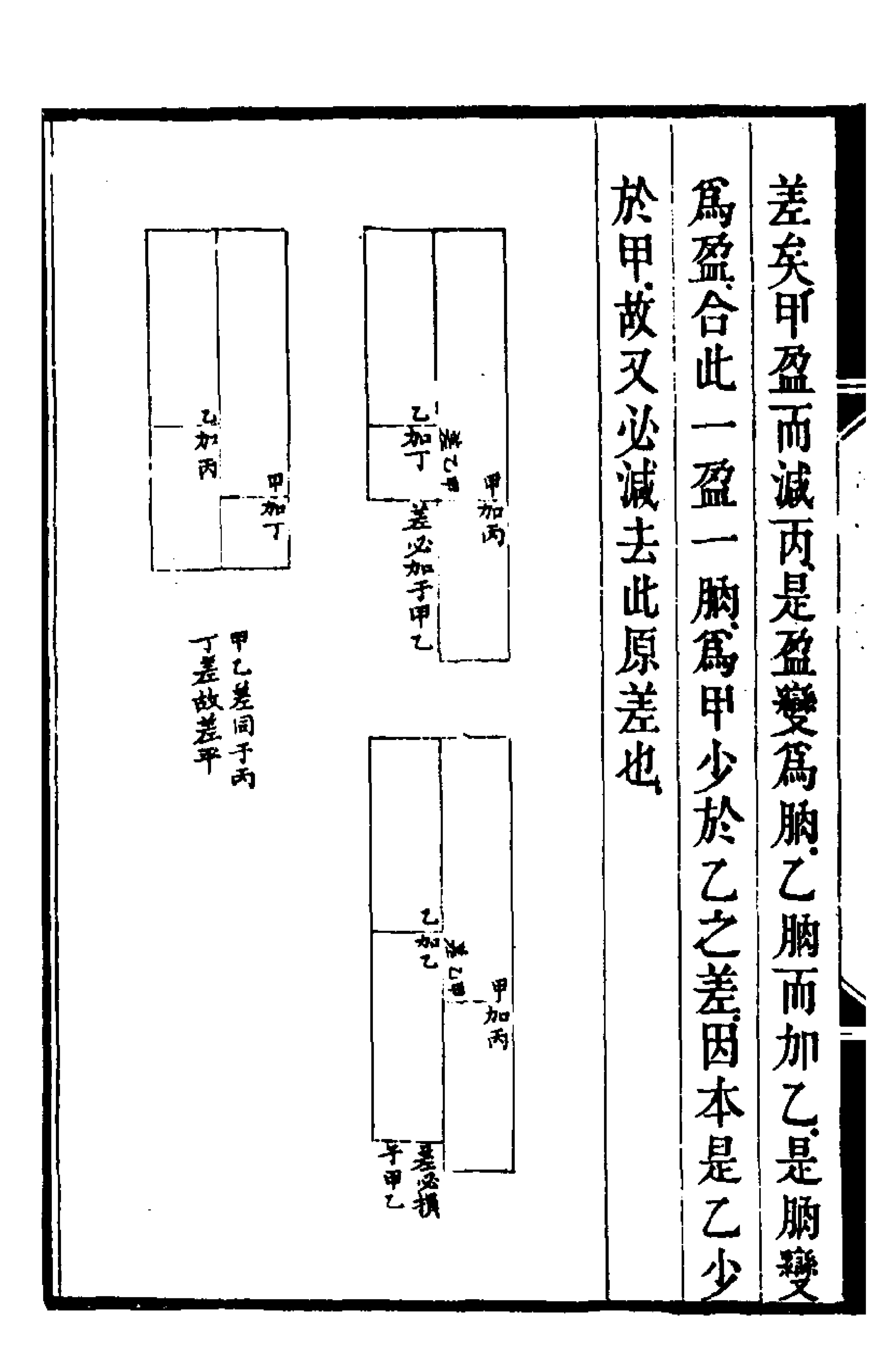
者如二四之差二四六之差亦二以二加六以四加

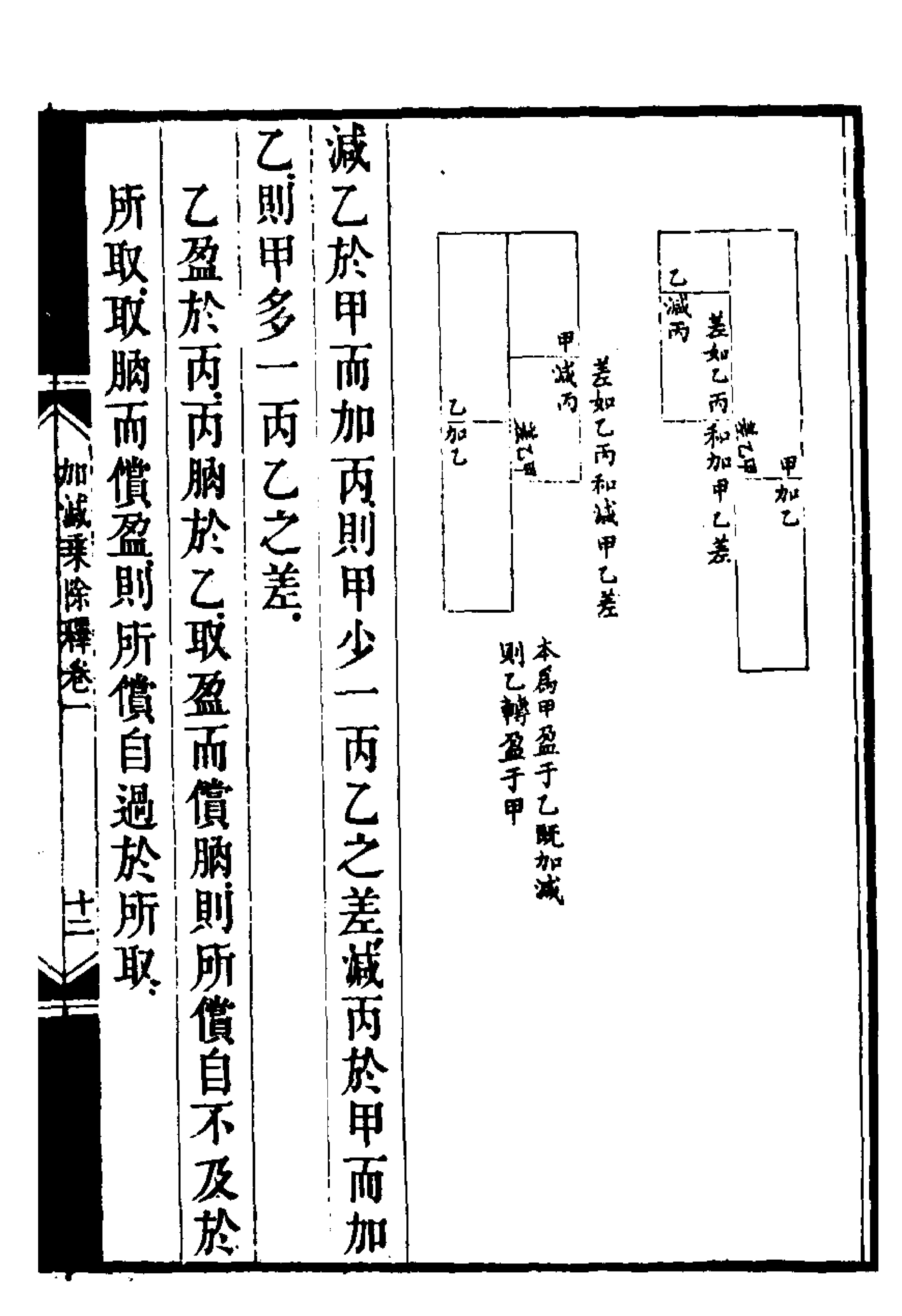
四皆得八於四減二於六減四皆得二固不必以四

加二以二加四而後皆爲六也甲盈又加乙是盈益

其盈乙朒又減丙是朒益其朒合此盈朒爲所增之

差矣甲盈而減丙是盈變爲朒乙朒而加乙是朒變爲盈合此一盈一朒爲甲少於乙之差因本是乙少於甲故又必減去此原差也





減乙於甲而加丙則甲少一丙乙之差減丙於甲而加乙則甲多一丙丙乙之差

乙盈於丙丙朒於乙取盈而償朒則所償自不及於所取取朒而償盈則所償自過於所取

甲
甲減乙
加丙
乙丙之差

甲
甲減丙
加乙
乙丙之差

有二甲減此以加彼其差必倍於所減之數半其差以加於朒則等有三甲減左以加右其差必倍於中差半左右之差得中差倍中差得左右之差減此以加彼則此朒而彼盈減左以加右則左中視右爲兩朒右中視左爲兩盈左右視中爲一盈一朒以兩盈兩朒之差相加如一盈一朒之相加

同名相減異名相加所以爲兩盈兩朒及一盈一朒者爲之法也云兩盈云兩朒云一盈一朒必有三色而後有此較若二色則此之盈必彼之朒不獨無兩盈無兩朒亦並無一盈一朒之名故九章盈不足術起於三色知起於三色則同名之相減異名之相加不待解而釋然矣

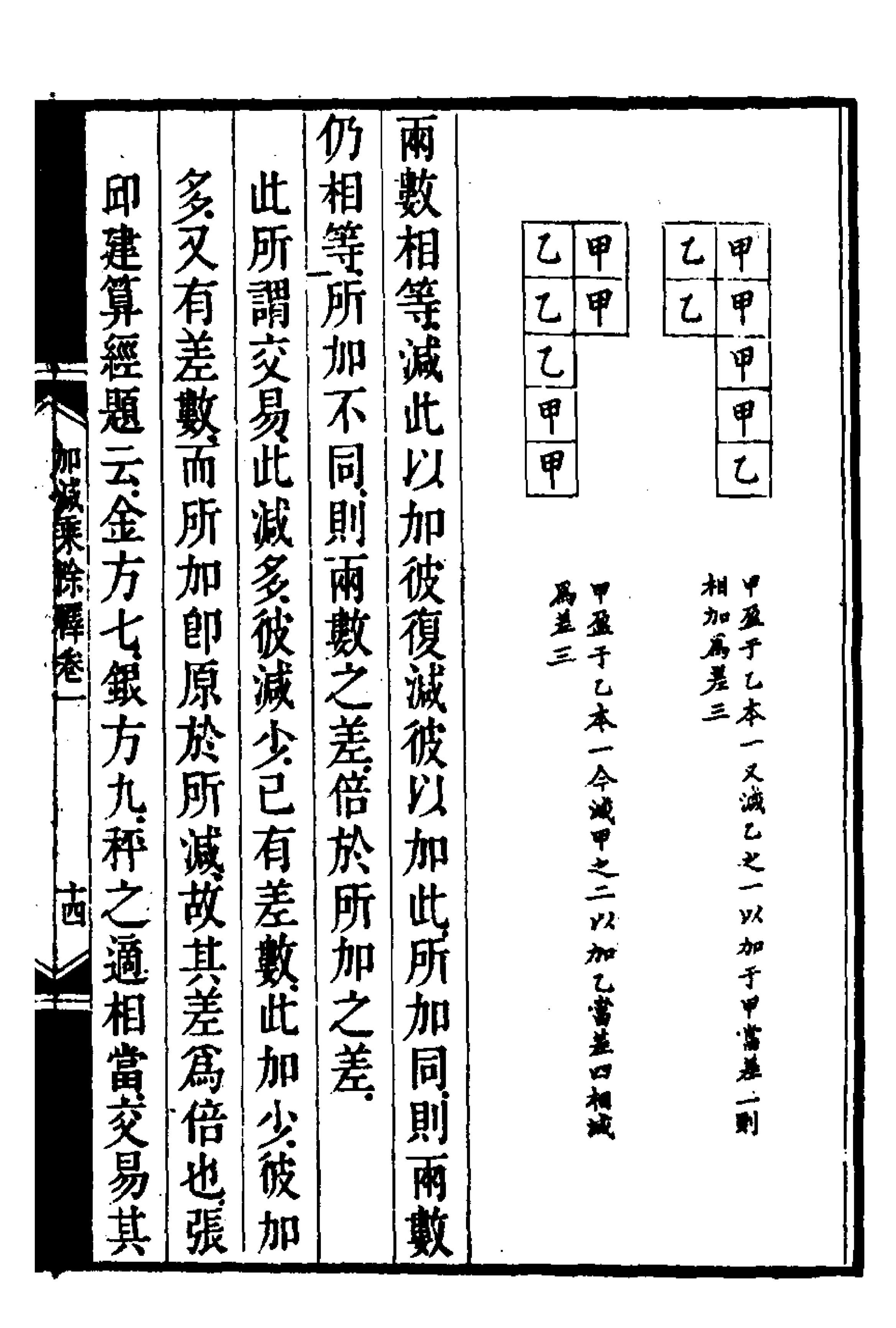
丙	乙	甲
丙	乙	甲
	乙	甲
		丙

甲乙丙皆三減丙之一以加于甲則甲四丙二甲盈于丙二乙盈于丙一爲兩盈相減得甲乙之差乙朒于甲一丙朒于甲二爲兩朒相減得乙丙之差甲盈于乙一丙朒于乙一爲一盈一朒相加爲甲丙之差

甲本盈於乙又減乙以加甲爲一盈一朒甲本盈於乙

今減甲以加乙爲兩盈乙本朒於甲今減甲以加乙爲兩朒

此兩色亦有兩盈亦有兩朒及一盈一朒蓋本有盈朒在先雖二色猶之三色也甲盈於乙是甲盈減乙是乙朒乙之朒仍甲之盈甲本盈是乙本朒盈皆在甲朒皆在乙故爲一朒一盈盈而又盈非加法乎甲本盈是甲盈減甲加乙是乙亦盈故爲兩盈或甲盈多加乙者少則盈仍在甲或加乙之數過於本盈之數則盈轉在乙故必減也兩朒之理亦然



兩數相等，減此以加彼，復減彼以加此，所加同，則兩數仍相等，所加不同，則兩數之差倍於所加之差。此所謂交易，此減多，彼減少，已有差數，此加少，彼加多，又有差數，而所加即原於所減，故其差爲倍也。張邱建算經題云，金方七，銀方九，秤之適相當，交易其

一則金輕七兩問金銀各重幾何法以相差七兩半之爲一之較蓋惟差倍於所加今惟計所加者之較故半其差也九章算術方程題云五雀六燕集稱之衡雀俱重燕俱輕一雀一燕交而處衡適平并燕雀重一斤術云如方程交易質之各重八兩此本有差而交易得平雖有總數可分得其平數而燕雀相雜故必以方程得之也

乙	甲
乙	甲
乙	甲
甲	甲
甲	乙
	乙
	乙

甲乙各六以甲之二加乙以乙之三加甲二與三之差止一而五與七之差已二二于一爲倍于所加之差

減甲則數與乙等者倍甲乙以相減其差必倍於減甲之數加乙則數與甲等者倍甲乙以相減其差必倍於加乙之數減甲以加乙則數與乙等者倍甲乙以相減其差必四倍於減甲加乙之數

減甲而後等是甲盈於乙均倍之其差之亦倍不待智者知之也加乙而後等是乙朒於甲均倍之其差之亦倍又不待智者知之也若減甲以加乙而後等是甲之盈於乙本倍於所減乙之朒於甲本倍於所加今均倍之故甲之所盈必四倍於所減之數也四倍之理無異倍差之理耳

甲	乙
甲	乙
甲	甲
甲	甲

甲六乙二減甲之二以加乙則均四

甲	乙
甲	乙
甲	倍乙
甲	倍乙
甲	
甲	
倍甲	
倍甲	
倍甲	
倍甲	
倍甲	
倍甲	

相減甲差八數前加之甲二爲四倍

減乙之數而甲倍者倍乙以減甲其差必倍於減乙之數加甲之數而甲倍於乙者倍乙以減甲其差必倍於加甲之數減乙以加甲而甲倍於乙者倍乙以減甲其差必三倍於加甲之數

甲倍乙必倍乙而後與甲等前條甲乙等故倍甲乙

此甲倍乙，故止倍乙。前條甲乙並倍，故四倍於所減。此止倍乙，故三倍於所減。蓋止減乙，是乙雖本盈謂本盈於既減之後，非必盈於甲也，而甲不朒，故倍乙而乙之盈倍甲之不朒自若也。或止加甲，是甲雖本朒謂本朒於既加之後，非必朒於乙也，而乙不盈，故倍乙而所以當甲之朒者亦倍。此外乙別無所盈也。減乙加甲，是乙之盈本倍於所減，爲加減之常例。又倍乙而不倍甲，是甲止朒一，而乙已盈兩，故不爲四倍而爲三倍也。由此推之，乙雖三倍四倍以至十倍，而乙之盈隨倍而增，甲之朒長爲一而自若也。

甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	減
甲	減
甲	
甲	

甲八乙六減乙之二則
甲倍于乙

甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	倍
甲	倍
	倍
	倍
	倍
	倍

倍乙六為十二與甲八相減差四
為倍于前圖所減之二

甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	
甲	
乙	
乙	

甲六乙六減乙之二以加于甲則甲八
乙四為甲倍于乙

甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
甲	乙
	倍
	倍
	倍
	倍
	倍
	倍

倍乙六為十二與甲六相減差六
為三倍于前圖所減之二

有甲乙之全數則較其全以得其差有甲乙之差數則
舍其差以得其平

張邱建算經云今有率戶出絹三匹依貧富欲以九等出之令戶各差除二丈今有上上三十九戶上中二十四戶上下五十七戶中上三十一戶中中七十八戶中下四十三戶下上二十五戶下中七十六戶下下一十三戶問九等戶戶各應出絹幾何術曰置上八等戶各求積差上上戶十六上中戶十四上下戶十二中上戶十中中戶八中下戶六下上戶四下中戶二各以其戶數乘而併之以出絹匹丈數乘凡戶所得以併數減之餘以凡戶數而一所得即下下戶遞加差各得上八等戶所出絹疋丈數孫子算經

云。今有五等諸侯。共分橘子六十顆。人別加三顆。問五人各得幾何。術曰。先置人數別加三顆於下。次六顆。次九顆。次十二顆。上十五顆。副并之得四十五。以減六十顆。餘人數除之。人得三顆。各加不并者。上得一十八爲公分。次得一十五爲侯分。次得十二爲伯分。次得九爲子分。下得六爲男分。二者之術一也。

差之相去等者。謂之錐行。甲無差。乙之差一。丙之差二。丁之差三。戊之差四。己之差五。庚之差六。辛之差七。壬之差八。癸之差九。

九章算術均輸術云。置錢錐行衰。注云。謂如立錐。又

金篋五尺舉首尾以問其中術云以四閒乘之葢數有五則閒有四推之十則閒九二則閒一皆退一之率也

錐行差式

		甲		
	乙	乙		
丙	丙	丙		
丁	丁	丁	丁	
戊	戊	戊	戊	戊

以甲減癸其差必九倍於甲乙以甲減壬其差必八倍於甲乙以甲減辛其差必七倍於甲乙以甲減庚其差

必六倍於甲乙。以甲減己。其差必五倍於甲乙。以甲減戊。其差必四倍於甲乙。以甲減丁。其差必三倍於甲乙。以甲減丙。其差必二倍於甲乙。

其差遞增。其兩兩相比之差必等。故其首尾之差。必視其間數爲倍數也。蓋依其倍數而乘之。則自壬癸可以得甲癸。依其倍數而除之。則自甲癸可以得壬癸。劉氏於金箋之術。謂以四約之。卽得每尺之差者。其理如是也。

甲
乙差
丙差差
丁差差差
戊差差差差
己差差差差差
庚差差差差差差
辛差差差差差差差
壬差差差差差差差差
癸差差差差差差差差差
間 間 間 間 間 間 間 間 間 間

凡奇數并本末而半之即中之奇倍中之奇即本末之并數凡偶數并本末即中之偶并中之偶即本末之并數

奇皆視乎三，偶皆視乎二。自中之奇至本以遞減，至末以遞增，減與增適相補也。自中之偶至本至末，其相補亦然。惟視奇多半差之增減耳。張邱建算經題云：今有與人錢，初一人與三錢，次一人與四錢，次一人與五錢，以次與之，轉多一錢，與訖還斂聚與均分之，人得一百錢。問人幾何。草曰：置人得錢一百，減初一人錢三文，得九十七，倍之，加初人，得一百九十五。此一百即中之奇，自此至初人爲遞減，至與訖爲遞增，恰爲一人一錢，故倍錢即得人數也。減初人者，自三文起，是一百少二人，倍之少四人，初人無對，又少一

人此三文止得一人與一文得一人不類故先減得數而又加也是數在加減之理爲盈不足易加減爲乘除則爲衰分之比例何也三數相次中之盈於上猶下之盈於中上中下或四五六或三五七或二五八皆是故倍中即上下之合數半上下之合數即中數倍中數加一倍也中數自乘則加數倍也於是亦以上乘下爲互加數倍則爲三率比例自一至十乃天地自然之數而盈不足之至精至妙不離乎是西人用爲對數表以加減代乘除其理固如是爾

五｜四｜三｜二｜一

五｜六｜七｜八｜九

五｜四｜三｜二｜一

六｜七｜八｜九｜十

四｜三｜二｜一

四｜五｜六｜七

六｜五｜四｜三

六｜七｜八｜九

四｜三｜二｜一
五｜六｜七｜八

六｜五｜四｜三
七｜八｜九｜十

三｜二｜一
三｜四｜五

七｜六｜五
七｜八｜九

三｜二｜一
四｜五｜六

七｜六｜五
八｜九｜十

二—二
｜　｜
一　三

八—八
｜　｜
七　九

二—三
｜　｜
一　四

八—九
｜　｜
七　十

并甲乙而半之，減半差得甲，加半差得乙，并甲丙而半之，即乙，減差得甲，加差得乙，并甲丁而半之，得乙丙并而半之之數，減半差得乙，加半差得丙，減差得甲，加差得丁。

差倍於所減則欲補其所減必半差矣甲丙之差既倍於甲乙故自乙加損之也於此可悟衰分盈朒相表裏詳見卷七

乙	甲
乙	乙

半差

丙	乙	甲
丙	乙	丙

丁	丙	乙	甲
丁	丙	乙	丁
丁	丙	丙	丁

半差

并甲乙而半之并壬癸而半之相減即壬甲之差并甲

乙而半之，并辛壬而半之，相減即辛甲之差。并甲乙而半之，并庚辛而半之，相減即庚甲之差。并甲乙而半之，并己庚而半之，相減即己甲之差。并甲乙而半之，并戊己而半之，相減即戊甲之差。并甲乙而半之，并丁戊而半之，相減即丁甲之差。并甲乙而半之，并丙丁而半之，相減即丙甲之差。

差依數而遞增，故得其差，而以間數除之，得相去之率。若以甲乙并，又以壬癸并，則差數已和，減得之差，非眞差矣。欲於和之中得其眞差，故用并而半之之法。甲乙相較，其差一，并而半之，各得半差。壬癸相較

其差一并而半之亦各得半差合兩半差爲一整差自癸至甲其差本九今合去其一則化九爲八是不爲癸至甲而爲壬至甲也凡舉本末之偶數其差者視乎此如丁之於甲其差三今并甲乙爲三并丙丁爲七相減得四非丁差也必半甲乙之三爲一五半丙丁之七爲三五是甲有乙差之半丙有丁差之半甲於正數既多半差丁又嫁半差於丙兩相減是丁較原差爲去其一矣較原差雖去其一乃已化和數而爲單數直變三間爲二間以除之無不合矣

丁	丙	乙	甲
丁	丙	乙	乙
丁	丙		
丁	丁		

并甲丙而半之并辛癸而半之相減卽辛甲之差并甲丙而半之并庚壬而半之相減卽庚甲之差并甲丙而半之并己辛而半之相減卽己甲之差并甲丙而半之并戊庚而半之相減卽戊甲之差并甲丙而半之并丁

己而半之相減即丁甲之差

偶數并而半之甲多半差癸少半差奇數并首尾而半之甲多一差癸少一差多半差少半差合之爲一差癸之九差減一差爲八差如壬甲多一差少一差合之爲二差癸之九差減二差爲七差如辛甲故凡并本末兩數之和則用偶數并半之法凡并本末三數之和則用奇數并半之法若甲丙乙丙和數六丁戊己和數十五己甲之原差五今以六減十五差九視五殊矣故兩相并半以加減之卯甲借丙差之一已分一差於丁爲損去原差之二也

己	戊	丁	丙	乙	甲
己	戊	丁	丙	乙	丙
己	戊	丁			
己	戊	丁			
己	戊	己			

并甲丁而半之并庚癸而半之相減卽庚甲之差并甲丁而半之并己壬而半之相減卽己甲之差并甲丁而半之并戊辛而半之相減卽戊甲之差

甲分丁之一差有半辛以一差有半與戊合之較原差爲少三故癸如庚壬如己辛如戊也

辛	庚	己	戊	丁	丙	乙	甲
辛	庚	己	戊	丁	丙	乙	丁
辛	庚	己	戊	丁	丙	丙	丁
辛	庚	己	戊				
辛	庚	己	戊				
辛	庚	己	辛				
辛	庚	庚	辛				

并甲乙丙半之并辛癸而半之相減如辛甲之差盈半差并甲乙丙半之并庚壬而半之相減如庚甲之差盈半差并甲乙丙半之并己辛而半之相減如己甲之差盈半差并甲乙丙半之并戊庚而半之相減如戊甲之

差盈半差并甲乙而半之并丁巳而半之相減如丁甲之差盈半差并甲乙而半之并丙戊而半之相減如丙甲之差盈半差

甲分乙之半差戊以一差與丙合之較原差爲少一差半是較丙甲盈半差也此奇偶雜舉之例

甲乙
乙乙
丙丙丙戊
丁丁丁丁
戊戊戊戊

并甲乙而半之并庚癸而半之相減如辛甲之差并甲

乙而半之、并己壬而半之、相減如庚甲之差、并甲乙而半之、并戊辛而半之、相減如己甲之差、

甲乙兩數并半、甲多半差、戊辛間兩數并半、辛少一差半、合為二差、故退二差也、此首尾雖皆偶而多寡不同之例、首二尾六、首四尾八之類、可類推、

并甲丙而半之、并己癸而半之、相減如庚甲之差、亦如辛乙之差、壬丙之差、并甲丙而半之、并戊壬而半之、相減如己甲之差、亦如庚乙之差、辛丙之差、并甲丙而半之、并丁辛而半之、相減如戊甲之差、亦如己乙之差、庚丙之差、

甲丙并半。甲多一差。丁辛間三數并半。辛少二差。合之少三差。辛甲退三差。如戊甲矣。此首尾皆奇。而多寡不同之例。三之與七。五之與九。可類推。總之不離乎三奇兩偶之義而已矣。

并乙丙之差。并丁戊之差。相減。爲甲之平率。則甲乙丙之共數。必等於丁戊之共數。并乙丙丁之差。并戊己之差相減。爲甲之倍平率。則甲乙丙丁之共數。必等於戊己之共數。并乙丙丁戊之差。并己庚之差。相減。爲甲之三倍平率。則甲乙丙丁戊之共數。必等於己庚之共數并乙丙丁戊己之差。并庚辛之差。相減。爲甲之四倍平

率，則甲乙丙丁戊己之共數，必等於庚辛之共數，并乙丙丁戊己庚之差，并辛壬之差，相減，爲甲之五倍平率，則甲乙丙丁戊己庚之共數，必等於辛壬之共數，并乙丙丁戊庚辛之差，并壬癸之差，相減，爲甲之六倍平率，則甲乙丙丁戊己庚辛之共數，必等於壬癸之共數，

九章算術均輸有題云，今有五人，分五錢，令上二人所得，與下三人等，問各得幾何，術曰，置錢錐行衰，并上二人爲九，并下三人爲六，六少於九三，以三均加焉，副并爲法，以所分錢乘未并者，各自爲實，實如法得一錢，按此理不易了，蓋以全數言之，且因二三減

得一可少一除未嘗明其倍數也若舍其平率而用其差甲無差乙差一丙差二合三丁差三戊差四合七以七減三是丁戊之差多於乙丙者四也丁戊之差多於乙丙而甲乙丙較丁戊之數多一甲故以差之減餘爲甲之平率以當丁戊差之盈其餘兩兩亦相當矣此甲乙丙與丁戊止多一甲也設甲乙丙丁與戊己則多甲乙又必以戊己差之盈當甲乙兩數當甲乙兩數則差之盈當兩平率矣推此而當三平率以上無不皆然以數之盈除差之盈自得平率也或用全數或用差數皆合者全數於差帶平率一故

每數加三連甲而較之也差數於全數去平率一故以減餘爲甲數離甲而較之也劉氏謂假令七人分七錢欲令上二人與下五人等則上下部差三人并上部爲十三下部爲十五下多上少下不足減上當以上下部列差而後均減乃合所問耳列差而後均減者不用全數而用差數也全數上少下多差數上合得十一下合得十是亦上多下少也杜知耕數學鑰用自乘令五十五減八十五亦爲上多下少蓋上之數少下之數多平率各當數之一連平率則下之附者多故化少爲多去平率則上之含者少故多不

移爲少也。

				甲
				甲
				甲
				甲
戊	丁	丙	乙	
戊	丁	丙		
戊	丁			
戊				

并甲乙兩單數半之。并壬癸兩單數半之。以減自甲至癸之數。即壬甲之差。與兩偶數并半。相減等并甲乙丙三單數半之。并辛壬癸三單數半之。以減自甲至癸之數。即辛甲之差。與兩奇數并半。相減等并甲乙丙三單數半之。半庚辛壬癸四單數半之。以減自甲至癸之數。

即辛甲之差盈半差與奇偶雜舉并半相減等、

并全數者并一二爲三并九十爲十九是也并差數者并一二三之差爲三并八九十之差爲二十四甲辛甲壬甲癸之差是也并單數者即去差之列數并一二三爲三并八九十亦爲三并一二三四爲四并五六七八亦爲四渾舉其目之名也用其全與用其差既屬相通用其去差之率與用其去率之差亦何爲其不通耶九章算術均輸題云有竹九節下三節容四升上四節容三升問中間二節欲均容各多少術曰以下三節分四升爲下率以上四節分三升爲上率上下

率以少減多餘爲實置四節三節各半之以減九節餘爲法實如法得一升即衰相去也上四分三即并甲丙而半之也下三分四即并己壬而半之也上下節以少減多即以兩并而半者相減也知甲丙知己癸而後可用并而半之法此渾舉三節四節故用除以得平數法少殊而義正合也四節三節各半之即并甲乙丙三單數半之并己庚辛壬四單數半之也以減九節者即以并而半者與自甲至壬之九數減也并甲一丙三半之爲二并己六壬九半之爲七五相減得五五并甲乙丙半之爲一五并己庚辛壬半

之爲二。合三五與九相減亦得五五故一爲實二爲法適相印合蓋自甲至壬之九數卽壬之全數壬之全數比己多三半之爲一五甲之全數比丙少二半之爲一。合爲二五此去平率而言差故於壬甲之差八數中減二五爲五五也甲之一爲差上之平率因合乙丙而半之爲一五是於正數一外多半數壬之一亦差上之平率因合己庚辛而半之爲二是於正數一外多一數并甲壬之正數多數爲三五而化而歸之於壬是壬之正數一外多二五此連正數平率以言差故於自甲至壬九數中減三五爲五五也戴

東原訂譌云以四節三節爲分母三升四升爲分子子母互乘子得上率九下率十六母相乘得十二十六減九餘七以十二通五節半得六十六爲一升之率循謂此題本可用齊同法以三互三升爲九以四互四升爲十六復以三互四之共差二十六爲七十八四互三之共差三爲十二以九減十六爲七以十二減七十八爲六十六是爲六十六分之七與數合蓋六十六者五五之十二倍也七者五八三三三不盡之十二倍也然依經之術以三除四得一三三三不盡以四除三得七五相減餘五八三三不盡因除

之不盡乃不用除得之數而用命分以三人四升命爲三分之四以四人三升命爲四分之三以四分之三與三分之四相減得十二分之七減分術用兩母相乘母子互乘以互乘數相減此十二分之七以五五除之得差之相去又因十二分之七不便於除故去其分母之十二而用分子之七爲整數則此七爲分子之十二倍矣五八三三不盡以十二乘之爲七此爲十二倍之實亦必以十二倍之法除之故以十二乘五五爲六十六而以六十六分之七爲相去之差非經文上下率分減之術卽互乘齊同之術也戴氏尚言之未詳耳

